Матричное представление классических операций над автоматами

В. В. Меньших, email: menshikh@list.ru
В. А. Никитенко, email: vitalijnikitenko82043@gmail.com

Воронежский институт МВД России

Аннотация. *Показан матричный подход интерпретации операций над автоматами, рассмотрен численный пример реализации.*

Ключевые слова: *Алгебра автоматов, матрица соединений, автоматы, операции над автоматами, чрезвычайное обстоятельство.*

Введение

Для успешной ликвидации чрезвычайного обстоятельства необходимо учитывать большой спектр факторов, которые влияют на проведение специальной операции по ликвидации ЧО. В подавлении ЧО учувствуют подразделения ОВД, у каждого из которых есть определенный функционал, в зависимости от вида ЧО. Для того чтобы ЧО было ликвидировано в кратчайшие сроки и с минимальными потерями необходимо правило координировать и осуществлять выбор действия подразделений [1]. Данная задача не является тривиальной в силу того, что необходимо учитывать достаточно большое количество нюансов при координации действий подразделений: вид ЧО, численный масштаб ЧО, количество подразделений и их численный состав, число нарушителей, местность; также необходимо производить прогнозы: жертв среди гражданского населения и сотрудников ОВД, ущерба, который будет нанесен ОВД и различным инфраструктурам. Решением поставленной задачи может выступать синтез отдельных подразделений в единую систему.

В качестве математического аппарата будет использован аппарат теории автоматов [2 – 7] потому, что составление автоматной модели действий отдельного подразделения более простая задача. После того как были составлены автоматные модели каждого подразделения необходимо осуществить синтез полученных автомат. Для синтеза автомат будет использована алгебра автоматов, которая позволяет осуществлять операции над ними. Полученные автоматные модели позволят описывать систему действий ОВД с учетом большего количества факторов, что в свою очередь позволит координировать их действия.

---

1. Матричное представление автомата

Один из способов программной реализации операций над автоматами это представление автомата в матричной форме. Рассмотрим один из способов представления автомата Мили в виде матрицы соединений.

Пусть задан автомат Мили $A = (X, Y, Q, F)$, где X − входной алфавит; Y − выходной алфавит; Q − множество состояний; F − оператор, описывающий переходы из состояния в состояние и соответствующие им выходы в зависимости от поступающих входов.

Для дальнейшего удобства представления в матричной форме запишем оператор в следующем виде:

$$\left\{ Fq^i = \left\{ q^{i_1}\left(x^{j_1} / y^{k_1}\right), \dots, q^{i_l}\left(x^{j_l} / y^{k_l}\right), \dots, q^{i_{n_i}}\left(x^{j_{n_i}} / y^{k_{n_i}}\right), i = \overline{1, |Q|} \right\} \right\}$$

Тогда матрицу соединений можно представить следующим образом

$$R_A = \left(r_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,|Q|}},$$

где $r_{ij} = \begin{cases} x / y, \text{если } q^j \in Fq^i \text{ по входному} \\ \text{символу } x \text{ и выходному символу } y, \\ 0, \text{ если иначе.} \end{cases}$

Будем говорить, что матрицей R_A называется матрица соединений автомата A.

2. Матричное представление операций над автоматами

Пусть

$$R_{A_1} = \left(r_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,|Q_{A_1}|}} \text{ и } R_{A_2} = \left(r_{kl}\right)_{k,l=\overline{1,|Q_{A_2}|}},$$

где $r_{ij} = \begin{cases} x_{A_1} / y_{A_1}, \text{если } q^j_{A_1} \in F_{A_1} q^i_{A_1} \text{ по входному} \\ \text{символу } x_{A_1} \text{ и выходному символу } y_{A_1}, \\ 0, \text{если иначе,} \end{cases}$

$$r_{kl} = \begin{cases} x_{A_2} / y_{A_2}, \text{если } q^l_{A_2} \in F_{A_2} q^k_{A_2} \text{ по входному} \\ \text{символу } x_{A_2} \text{ и выходному символу } y_{A_2}, \\ 0, \text{если иначе.} \end{cases}$$

матрицы соединений автоматов (1) и (2) соответственно, тогда матрица соединений R_{Π} автомата $\Pi = A_1 \times A_2$ равна прямому произведению матриц R_{A_1}, R_{A_2}

$$R_{\Pi} = R_{A_1} \times R_{A_2} = \left(r_{ij,kl} \right)$$

где $r_{ij} = \begin{cases} \left\{ x_{A_1}, x_{A_2} \right\} / \left\{ y_{A_1}, y_{A_2} \right\}, \text{если } r_{ij} = x_{A_1} / y_{A_1} \text{ и } r_{kl} = x_{A_2} / y_{A_2}, \\ 0, \text{если иначе.} \end{cases}$

Матрица соединений R_{Σ} автомата $\Sigma = A_1 + A_2$ определяется следующим образом

$$R_{\Sigma} = \left(R_{A_1} \times E_{A_2} \right) + \left(E_{A_1} \times R_{A_2} \right)$$

где E_{A_1}, E_{A_2} – единичные матрицы порядка R_{A_1}, R_{A_2} соответственно, операция $\times$ понимается как прямое произведение матриц R_{A_1}, E_{A_2} и E_{A_1}, R_{A_2}, операция $+$ как сумма матриц $\left(R_{A_1} \times E_{A_2} \right)$ и $\left(E_{A_1} \times R_{A_2} \right)$.

Матрица соединений R_{K} автомата $K = A_1 \circ A_2$ определяется следующим образом

$$R_{\Pi} = R_{A_1} \circ R_{A_2} = \left(r_{ij,kl} \right)$$

где $r_{ij} = \begin{cases} \left\{ x_{A_1}, x_{A_2} \right\} / \left\{ y_{A_1}, y_{A_2} \right\}, \text{если } y_{A_1} = x_{A_2} \text{ или } y_{A_2} = x_{A_1}, \\ 0, \text{если иначе.} \end{cases}$

Матрица соединений R_{C} автомата $C = A_1 + A_2$ определяется следующим образом

$$R_{C} = R_{A_1} + R_{A_2}.$$

3. Численный пример

Предположи, что функционирование ОВД при ликвидации ЧО описывается следующими автоматами $A_1 = \left(X_{A_1}, Y_{A_1}, Q_{A_1}, F_{A_1} \right)$, $A_2 = \left(X_{A_2}, Y_{A_2}, Q_{A_2}, F_{A_2} \right)$, где $X_{A_1} = \left\{ x^1_{A_1}, x^2_{A_1} \right\}$, $Y_{A_1} = \left\{ y^1_{A_1}, y^2_{A_1} \right\}$, $Q_{A_1} = \left\{ q^1_{A_1}, q^2_{A_1} \right\}$, $X_{A_2} = \left\{ x^1_{A_2}, x^2_{A_2}, x^3_{A_2}, x^4_{A_2} \right\}$ $Y_{A_1} = \left\{ y^1_{A_2}, y^2_{A_2}, y^3_{A_2}, y^4_{A_2} \right\}$, $Q_{A_2} = \left\{ q^1_{A_2}, q^2_{A_2}, q^3_{A_2} \right\}$, а операторы F_{A_1} и F_{A_2} представим в виде:

Оператор F_{A_1}

F_{A_1}	$q^1_{A_1}$	$q^2_{A_1}$
$q^1_{A_1}$	-	$x^1_{A_1} / y^1_{A_1}$
$q^2_{A_1}$	$x^2_{A_1} / y^2_{A_1}$	-

Таблица 1

Оператор F_{A_2}

F_{A_2}	$q^1_{A_2}$	$q^2_{A_2}$	$q^3_{A_2}$
$q^1_{A_2}$	-	$x^1_{A_2} / y^1_{A_2}$	$x^2_{A_2} / y^2_{A_2}$
$q^2_{A_2}$	$x^3_{A_2} / y^3_{A_2}$	-	-
$q^3_{A_2}$	-	$x^4_{A_2} / y^4_{A_2}$	-

Задача: «Определить автомат описывающий функционирование подразделений ОВД с синхронной сменой состояний». Переформулируем задачу следующим образом: вычислить автомат $A_3 = A_1 \times A_2$, который является автоматом интерпретирующий работу автоматов A_1, A_2 с синхронной сменой состояний [8].

Матрицы соединений автоматов A_1, A_2 имеют вид

$$R_{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & x^1_{A_1} / y^1_{A_1} \\ x^2_{A_1} / y^2_{A_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & x^1_{A_2} / y^1_{A_2} & x^2_{A_2} / y^2_{A_2} \\ x^3_{A_2} / y^3_{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & x^4_{A_2} / y^4_{A_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим X_{A_3}.

$$X_{A_1} \times X_{A_2} = \left\{ \begin{matrix} \{x^1_{A_1}, x^1_{A_2}\}, \{x^1_{A_1}, x^2_{A_2}\}, \{x^1_{A_1}, x^3_{A_2}\}, \{x^1_{A_1}, x^4_{A_2}\}, \\ \{x^2_{A_1}, x^1_{A_2}\}, \{x^2_{A_1}, x^2_{A_2}\}, \{x^2_{A_1}, x^3_{A_2}\}, \{x^2_{A_1}, x^4_{A_2}\} \end{matrix} \right\}$$

Переобозначим элементы множества $X_{A_1} \times X_{A_2}$ следующим образом $\left\{ x^i_{A_1}, x^j_{A_2} \right\} = x^{ij}$, тогда множество $X_{A_1} \times X_{A_2}$ имеет следующий вид:

$$\left\{ x^{11}, x^{12}, x^{13}, x^{14}, x^{21}, x^{22}, x^{23}, x^{24} \right\} .$$

Аналогично вычислим Y_{A_3} с учетом обозначения, получаем

$$Y_{A_3} = \left\{ y^{11}, y^{12}, y^{13}, y^{14}, y^{21}, y^{22}, y^{23}, y^{24} \right\} .$$

Множество состояний будет иметь вид

$$Q_{A_3} = \left\{ q^{11}, q^{12}, q^{13}, q^{21}, q^{22}, q^{23} \right\} .$$

Для вычисления F_{A_3} воспользуемся матричным представлением автоматов A_1, A_2.

$$R_{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & x^1_{A_1} / y^1_{A_1} \\ x^2_{A_1} / y^2_{A_1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & x^1_{A_2} / y^1_{A_2} & x^2_{A_2} / y^2_{A_2} \\ x^3_{A_2} / y^3_{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & x^4_{A_2} / y^4_{A_2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^{11} / y^{11} & x^{12} / y^{12} \\ 0 & 0 & 0 & x^{13} / y^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{14} / y^{14} & 0 \\ 0 & x^{21} / y^{21} & x^{22} / y^{22} & 0 & 0 & 0 \\ x^{23} / y^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{24} / y^{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заключение

В результате были получены матричные операций над автоматами, которые позволяют построить численный метод реализации операций над автоматами. Рассмотрен численный пример применения матричного представления автомата и вычисления автомата интерпретирующий синхронную смену состояний автоматов.

Список литературы

1. Меньших, А. В. Модель и численный метод оптимизации выбора действий органов внутренних дел при возникновении чрезвычайных обстоятельств криминального характера /

А. В. Меньших, В. В. Горлов // Вестник Воронежского института МВД России. – 2016. – № 2. – С. 213-221.

2. Меньших, В. В. Теоретическое обоснование и синтез математической модели защищенной информационной системы ОВД как сети автоматов / В. В. Меньших, Е. В. Петрова // Вестник Воронежского института МВД России. – 2010. – № 3. – С. 134-143.

3. Меньших, В. В. Обоснование выбора математического аппарата для моделирования действий органов внутренних дел при возникновении чрезвычайных обстоятельств / В. В. Меньших, В. В. Горлов, В. А. Никитенко // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2022. – № 4. – С. 135-141.

4. Горбатов, В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.

5. Калман, Р. Э. Очерки по математической теории систем: пер. с англ. / Р. Э. Калман, П. Л. Фалб., М. А. Арбиб; под ред. Я. З. Цыпкина, Э. Л. Наппельбаума. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

6. Корчагин, А. В. Автоматная модель чрезвычайной ситуации техногенного характера / А. В. Корчагин // Международна научна школа "Парадигма". Лято-2015 : сборник научни статии в 8 тома, ВАРНА, 20-23 августа 2015 года. – ВАРНА: ЦЕНТЪР ЗА НАУЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ И ИНФОРМАЦИЯ "ПАРАДИГМА", 2015. – С. 68-72.

7. Кудрявцев, В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов / В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 320 с.

8. Мелихов, А. Н. Ориентированные графы и конечные автоматы / А. Н Мелихов – М.: “Наука”, 1971. – 416 с.